Ministère de l'Enseignement Supérieur, de la Recherche Scientifique et de la Technologie
Université de Tunis
Ecole Normale Supérieure

Session 2009
du
Concours d'Entrée à l'Ecole Normale Supérieure
Filière MP

Première épreuve de mathématiques

4 Pages Durée: 4 heures

La qualité de la rédaction, le soin de la présentation et la rigueur des raisonnements constituront un élément important pour l'appréciation des copies. L'usage de tout ouvrage de référence et de tout autre matériel électronique est strictement interdit.

L'ensemble des suites d'un ensemble non vide A est noté $A^{\mathbb{N}}$. Par ailleurs, on note $\mathcal{F}$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions complexes définies sur $[0,\pi]$ et $\mathcal{C}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}$ des fonctions continues sur $[0,\pi]$. On rappelle qu'on définit une norme sur $\mathcal{C}$ en posant

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in [0,\pi]\}, \quad \text{pour } f \in \mathcal{C}.$$

On suppose $\mathcal{C}$ muni de sa structure d'espace vectoriel normé induite par la norme $\|\,\|_\infty$ définie ci-dessus. Pour tout $f \in \mathcal{C}$ et tout $r \in \mathbb{R}_+^*$, on pose

$$B(f,r) = \{g \in \mathcal{C} : \|f-g\|_\infty < r\}.$$

Une partie non vide $\mathcal{O}$ de $\mathcal{C}$ est dite *ouverte* si, pour tout $f \in \mathcal{O}$, il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $B(f,r)$ soit contenu dans $\mathcal{O}$. En particulier, $\mathcal{C}$ est une partie ouverte de $\mathcal{C}$. On convient de plus que le vide est une partie ouverte de $\mathcal{C}$. Une partie non vide F de $\mathcal{C}$ est dite *fermée* si son complémentaire F^c dans $\mathcal{C}$ est une partie ouverte de $\mathcal{C}$. Ainsi, le vide et $\mathcal{C}$ sont deux parties fermées de $\mathcal{C}$. L'intersection de toutes les parties fermées de $\mathcal{C}$ contenant une partie E de $\mathcal{C}$ est appelée l'*adhérence* de E dans $\mathcal{C}$ et est notée $\overline{E}$. En particulier, E est contenue dans $\overline{E}$. Par ailleurs, si $(f_n) \in \mathcal{C}^{\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0,\pi]$ vers $f \in \mathcal{C}$, on note $f = \lim_{\mathcal{C}} f_n$. Enfin, on utilise les notations usuelles pour les coefficients de Fourier.

Dans tout ce qui suit, on note $\mathcal{C}^1$ le sous-ensemble de $\mathcal{C}$ des fonctions de classe C^1 sur $[0,\pi]$. En outre, on pose

$$X = \left\{ f \in \mathcal{C}^1 : \int_0^\pi |f'(x)|^2\,dx \le 1 \text{ et } f(0) = f(\pi) = 0 \right\},$$

où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f de $\mathcal{C}^1$. L'objectif essentiel de ce problème est de déterminer $\overline{X}$, l'adhérence de X dans $\mathcal{C}$.

(a) Tracer $\overline{\Lambda}$ sur $[-3\pi, 3\pi]$.

(b) Vérifier que $\overline{\Lambda}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

(c) Déterminer la série de Fourier de $\overline{\Lambda}$.

(d) Montrer que la série de Fourier de $\overline{\Lambda}$ converge normalement vers $\overline{\Lambda}$ sur $\mathbb{R}$.

(e) Etablir

$$\overline{\Lambda}(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \sin((2n+1)x), \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

(f) Calculer la somme de la série $\sum \frac{1}{(2n+1)^3}$ et la somme de la série $\sum \frac{1}{n^3}$.

(g) En déduire que la fonction $f \in \mathcal{F}$ définie par

$$f(x) = \pi^{-1/2} \Lambda(x), \quad \text{pour } x \in [0, \pi]$$

appartient à Y.

- Partie III -

1. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, continue et 2π-périodique. On suppose que sa série de Fourier converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.

   (a) Montrer que $c_n(f) = c_n(g)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

   (b) En déduire que $f = g$.

2. Soit $f \in X$. On note $\widetilde{f}$ la fonction de $\mathcal{F}$, impaire, 2π-périodique et telle que

$$\widetilde{f}(x) = f(x), \quad \text{pour } x \in [0, \pi].$$

   (a) Montrer que $\widetilde{f}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

   (b) Etablir $a_n\left(\left(\widetilde{f}\right)'\right) = n b_n\left(\widetilde{f}\right)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   (c) En déduire que $f \in Y$.

3. Prouver que X est strictement inclus dans Y.

4. Soient $g \in Y$ et $(b_n) \in S$ tels que

$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \sin(nx), \quad \text{pour tout } x \in [0, \pi].$$

On note, pour $p \in \mathbb{N}$ et $x \in [0, \pi]$,

$$g_p(x) = \sum_{n=0}^{p} b_n \sin(nx).$$

   (a) Soit $p \in \mathbb{N}$. En prolongeant la fonction g_p d'une manière naturelle en une fonction impaire et 2π-périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, montrer que $g_p \in X$.

   (b) Montrer que la suite de fonctions (g_p) converge uniformément vers g sur $[0, \pi]$.

5. Montrer que l'ensemble Y est contenu dans $\overline{X}$.

- Partie I -

Soit E une partie non vide de $\mathcal{C}$.

1. Montrer que $\overline{E}$ est une partie fermée de $\mathcal{C}$.
2. En déduire que E est une partie fermée de $\mathcal{C}$ si, et seulement si, $E = \overline{E}$.
3. Soit $f \in \mathcal{C}$.
   (a) Montrer que si $r \in \mathbb{R}_+^*$, alors $B(f, r)$ est une partie ouverte de $\mathcal{C}$ contenant f.
   (b) Montrer que $f \in \overline{E}$ si, et seulement si,
   $$E \cap B(f, r) \neq \emptyset, \quad \text{pour tout } r \in \mathbb{R}_+^*.$$
4. Soit $f \in \mathcal{C}$.
   (a) Justifier l'existence de la borne inférieure de l'ensemble
   $$\{\|f - g\|_\infty : g \in E\},$$
   On note $\mathrm{d}(f, E)$ cette borne inférieure.
   (b) Montrer que $f \in \overline{E}$ si, et seulement si, $\mathrm{d}(f, E) = 0$.
5. Etablir l'égalité
   $$\overline{E} = \left\{ \lim_{\mathcal{C}} f_n : (f_n) \in E^{\mathbb{N}} \right\}.$$

- Partie II -

1. On pose
   $$S = \left\{ (b_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \sum |nb_n|^2 \text{ est convergente et } \sum_{n=0}^{+\infty} |nb_n|^2 \leq \frac{2}{\pi} \right\}.$$
   (a) Etablir l'inégalité $2|uv| \leq |u|^2 + |v|^2$ pour tout $(u, v) \in \mathbb{C}^2$.
   (b) En déduire que si $(b_n) \in S$ alors la série $\sum b_n$ est absolument convergente.
   (c) Soit $b = (b_n) \in S$. Montrer que la série de fonctions de terme général
   $$b_n \sin(nx), \quad \text{pour } (n, x) \in \mathbb{N} \times [0, \pi],$$
   converge uniformément sur $[0, \pi]$ vers une fonction de $\mathcal{F}$ notée désormais $[b]$.
   Dans cette partie et jusqu'à la fin du problème, on pose
   $$Y = \{[b] : b \in S\}.$$
   (d) Montrer que Y est contenu dans $\mathcal{C}$.
2. Soit h la fonction de $\mathcal{F}$ définie par
   $$h(x) = \min\{x, \pi - x\}, \quad \text{pour } x \in [0, \pi].$$
   On note $\overline{h}$ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, impaire, 2π-périodique et telle que
   $$\overline{h}(x) = h(x), \quad \text{pour } x \in [0, \pi].$$

(a) Tracer $\widetilde{h}$ sur $[-3\pi, 3\pi]$.

(b) Vérifier que $\widetilde{h}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

(c) Déterminer la série de Fourier de $\widetilde{h}$.

(d) Montrer que la série de Fourier de $\widetilde{h}$ converge normalement vers $\widetilde{h}$ sur $\mathbb{R}$.

(e) Etablir

$$\widetilde{h}(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \sin((2n+1)x), \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

(f) Calculer la somme de la série $\sum \frac{1}{(2n+1)^2}$ et la somme de la série $\sum \frac{1}{n^2}$.

(g) En déduire que la fonction $f \in \mathcal{F}$ définie par

$$f(x) = \pi^{-1/2} h(x), \quad \text{pour } x \in [0, \pi]$$

appartient à Y.

- Partie III -

1. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, continue et 2π-périodique. On suppose que sa série de Fourier converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.

   (a) Montrer que $c_n(f) = c_n(g)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

   (b) En déduire que $f = g$.

2. Soit $f \in X$. On note $\widetilde{f}$ la fonction de $\mathcal{F}$, impaire, 2π-périodique et telle que

$$\widetilde{f}(x) = f(x), \quad \text{pour } x \in [0, \pi].$$

   (a) Montrer que $\widetilde{f}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

   (b) Etablir $a_n\left(\left(\widetilde{f}\right)'\right) = n b_n\left(\widetilde{f}\right)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   (c) En déduire que $f \in Y$.

3. Prouver que X est strictement inclus dans Y.

4. Soient $g \in Y$ et $(b_n) \in S$ tels que

$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \sin(nx), \quad \text{pour tout } x \in [0, \pi].$$

On note, pour $p \in \mathbb{N}$ et $x \in [0, \pi]$,

$$g_p(x) = \sum_{n=0}^{p} b_n \sin(nx).$$

   (a) Soit $p \in \mathbb{N}$. En prolongeant la fonction g_p d'une manière naturelle en une fonction impaire et 2π-périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, montrer que $g_p \in X$.

   (b) Montrer que la suite de fonctions (g_p) converge uniformément vers g sur $[0, \pi]$.

5. Montrer que l'ensemble Y est contenu dans $\overline{X}$.

6. Soit (f_k) une suite de fonctions appartenant à Y telle que $\lim_{\mathcal{C}} f_k = f$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe alors une suite $\beta_k = (b_{k,n})_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{S}$ telle que $f_k = [\beta_k]$. En particulier,

$$f_k(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_{k,n} \sin(nx), \quad \text{pour tout } x \in [0,\pi].$$

   (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la suite $(b_{k,n})_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ converge vers b_n avec

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx.$$

   (b) Montrer que la suite (b_n) appartient à $\mathcal{S}$.

   (c) En déduire que $f \in Y$.

7. Montrer que Y est une partie fermée de $\mathcal{C}$.

8. Conclure que $\overline{X} = Y$.

Fin de l'épreuve

Concours d'entrée à l'Ecole Normale Supérieure JUILLET 2009	Matière : Anglais
	Durée 1H coefficient 1

Please write your name on the en- tête sheet not on the answers sheet.

Finally, an Average Black Hole

Heavyweight and lightweight black holes abound in the universe, but nobody has detected a middleweight – and some scientists argue they don't exist. Now, astronomers say they have found the first conclusive evidence for one of these elusive objects at the fringe of a distant galaxy. Estimated to be at least 500 times more massive than the sun, the discovery could plug a large gap in the cosmic menagerie, though it leaves unanswered questions about this type of black hole's origins.

Small black holes – also known as stellar-mass black holes – form as the relics of giant exploding stars. They grow by gobbling up nearby gas, dust, and even unfortunate planets and stars that wander too close. But they have a built-in feeding-control mechanism. Called the Eddington limit, it kicks in when the massive amount of radiation spawned by the black hole matches the inflow of material. That effect limits the amount of x-rays the black hole emits, and astronomers can calculate the object's mass based on the strength of the radiation. Astronomers can also use the Eddington limit to measure supermassive black holes, which can weigh more than billions of stars.

The newly discovered object, called HLX-1, is the first to show an intermediate weight between stellar-mass and supermassive black holes. Astronomers led by Sean Farrell, formerly at the Centre d'Etude Spatiale des Rayonnements in France, detected HLX-1, hanging just outside a galaxy about 290 million light-years away, during a search for unusual white dwarfs and neutron stars. As the researchers report tomorrow in *Nature*, they found that HLX-1 is spewing 10 times as much x-radiation as stellar-mass black holes normally do, suggesting that the object is much heavier. Based on its radiation intensity, the team conservatively estimates its mass at 500 times that of the sun, says Farrell, now at the University of Leicester in the United Kingdom.

The find still leaves open an important question about intermediate black holes. "If they exist, it's not at all clear where they came from," says Christopher Reynolds, an astronomer at the University of Maryland, College Park. It's possible that small black holes that formed within a densely packed stellar cluster could merge into a midsize variety. Or, intermediate-mass black holes could be leftovers from the very earliest stars in the universe, which scientists think were much larger than today's versions. The former scenario may be more likely, notes Farrell, as observations place HLX-1 far away from its parent galaxy's center and apparently outside of the main disk--which is exactly where a tightly packed globular cluster of stars would be located.

"We must now take the existence of intermediate-mass black holes very seriously," says Reynolds. And that means getting "on with the business of figuring out how nature makes them."

By Phil Berardelli
Science Magazine



Outlier. Astronomers think they have found an intermediate-mass black hole (bright blue object) just outside a distant galaxy.

Clear handwriting and clean presentation of your paper are required.

I. COMPREHENSION QUESTIONS

A/ Answer the following questions using complete sentences and your own words.

1. What is this scientific article about? Explain.

.....

.....

.....

2. Which observations made are interesting for the current research?

.....

.....

.....

3. Does this research bring new hypotheses to previous research? Justify your answer.

.....

.....

.....

4. The text consists of four paragraphs. Write one sentence for each, containing the essential information in it. Combine your sentences to form a summary of the whole article.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

II. LANGUAGE

A/ Put the verbs in brackets into the correct tense.

When the old lady **(return)** ..... to her flat she **(see)** ..... at once that burglars **(break)** ..... in during her absence, because the front door **(be)** ..... open and everything in the flat **(look)** ..... chaotic. The burglars themselves **(may be)** ..... no longer there, but they probably only just **(leave)** ..... because a cigarette **(burn)** ..... still on an ornamental table. Probably they **(hear)** ..... the lift coming up and **(run)** ..... down the fire escape. They **(help)** ..... themselves to her coffee too but there **(be)** ..... a little left, so she **(pour)** ..... herself out a drink. She **(wonder)** ..... if they **(find)** ..... her jewellery and rather hoped that they **(have)** ..... The jewellery **(give)** ..... to her by her husband, who **(die)** ..... some years before. Since his death **(not have)** ..... the heart to wear it. Yet if it **(not steal)** ..... by the burglars she never **(sell)** ..... it.

B/ Answer the following questions.

1. Express conditional type 2 and say what it is used for.

.....

.....

Example: If he **(be)**.....

2. Which verbs cannot take the progressive tense? Give examples for each case.

.....

.....

.....

III. WRITING

Many astro-physicists are committing themselves to the 21st century's challenge of landing man on the moon, March or other galactic bodies. Do you think this is an exaggerated or plausible affirmation? In a coherent essay, evaluate and discuss this statement using appropriate examples to defend and illustrate your point of view about your own perception of the causes and effects of the international race over space expansion.

Ministère de l'Enseignement Supérieur, de la Recherche Scientifique et de la Technologie
Université de Tunis
Ecole Normale Supérieure

Session 2009
du
Concours d'Entrée à l'Ecole Normale Supérieure
Filière MP

Deuxième épreuve de mathématiques

4 Pages Durée: 4 heures

La qualité de la rédaction, le soin de la présentation et la rigueur des raisonnements constitueront un élément important pour l'appréciation des copies. L'usage de tout ouvrage de référence et de tout autre matériel électronique est strictement interdit.

Comme de coutume, on note $\mathbb{R}$ le corps des nombres réels, $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs et $\mathbb{N}$ celui des entiers naturels. Si f est une fonction réelle d'une variable réelle, on note $\mathrm{D}(f)$ son domaine de définition. On désigne par $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel réel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$ et, pour $m \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{R}_m[X]$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ des polynômes de degrés inférieurs ou égaux à m. Si m est non nul dans $\mathbb{N}$, on note $\mathbb{R}^m$ l'espace vectoriel réel des m-uplets à coefficients dans $\mathbb{R}$, qui est souvent identifié à l'espace vectoriel réel $\mathrm{M}_{m,1}(\mathbb{R})$ des matrices à m lignes et une colonne, et à coefficients dans $\mathbb{R}$.

Tout au long du problème, on désigne par n un entier naturel non nul. L'algèbre réelle des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{R}$ est notée $\mathrm{M}(n,\mathbb{R})$. Le groupe des matrices inversibles de $\mathrm{M}(n,\mathbb{R})$ est noté $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ et la matrice identitée de $\mathrm{M}(n,\mathbb{R})$ est notée I. Si $U \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$, on note U^{-1} son inverse. Une matrice diagonale D de $\mathrm{M}(n,\mathbb{R})$ est notée $\mathrm{diag}(\lambda_1,...,\lambda_n)$, où $\lambda_1,...,\lambda_n$ sont les coefficients diagonaux de D. On rappelle que $A \in \mathrm{M}(n,\mathbb{R})$ est diagonalisable s'il existe $U \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ et $D \in \mathrm{M}(n,\mathbb{R})$ diagonale telles que $A = UDU^{-1}$. Une telle décomposition de A est dite une *diagonalisation* de A. Pour une matrice $A \in \mathrm{M}(n,\mathbb{R})$, on note ${}^tA$ sa transposée et $\mathrm{Sp}(A)$ l'ensemble de toutes ses valeurs propres réelles. Le sous-ensemble de $\mathrm{M}(n,\mathbb{R})$ des matrices symétriques est noté $\mathrm{S}(n,\mathbb{R})$ et celui des matrices orthogonales est noté $\mathrm{O}(n,\mathbb{R})$. Ainsi,

$$\mathrm{S}(n,\mathbb{R}) = \left\{A \in \mathrm{M}(n,\mathbb{R}) : {}^tA = A\right\} \quad \text{et} \quad \mathrm{O}(n,\mathbb{R}) = \left\{A \in \mathrm{M}(n,\mathbb{R}) : {}^tAA = I\right\}.$$

On rappelle que si $S \in \mathrm{S}(n,\mathbb{R})$ alors il existe $O \in \mathrm{O}(n,\mathbb{R})$ et une matrice diagonale D de $\mathrm{M}(n,\mathbb{R})$ telles que $S = ODO^{-1}$. On rappelle également que $\mathrm{O}(n,\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$. Une matrice $S \in \mathrm{S}(n,\mathbb{R})$ est dite *positive* si ${}^tXSX \geq 0$ pour tout $X \in \mathbb{R}^n$. En revanche, S est dite *définie positive* si ${}^tXAX > 0$ pour tout $X \in \mathbb{R}^n - \{0\}$. Le sous-ensemble de $\mathrm{S}(n,\mathbb{R})$ des matrices positives est noté $\mathrm{S}^+(n,\mathbb{R})$ et celui des matrices définies positives est noté $\mathrm{S}^{++}(n,\mathbb{R})$.

Ce problème (comportant cinq parties) a pour objectif principal d'établir la décomposition polaire d'une matrice inversible de $\mathrm{M}(n,\mathbb{R})$ et ensuite d'en fournir quelques applications aussi bien algébriques que topologiques.

I - Fonction d'une matrice diagonalisable

1. Soient $M \in \mathrm{M}(n,\mathbb{R})$ et $U \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$.

   (a) Montrer que $\left(UMU^{-1}\right)^k = UM^kU^{-1}$, pour tout $k \in \mathbb{R}$.

   (b) En déduire que $P\left(UMU^{-1}\right) = UP(M)U^{-1}$, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$.

2. Soient $m \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, ..., a_m \in \mathbb{R}$ deux à deux distincts. On considère l'application

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{R}_{m-1}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ & P & \longmapsto & (P(a_1), ..., P(a_m)). \end{array}$$

   (a) Vérifier que φ est linéaire.

   (b) Déterminer le noyau de φ.

   (c) En déduire que φ est bijective.

Dans la suite de cette partie, f désigne une fonction réelle d'une variable réelle et A est une matrice diagonalisable de $\mathrm{M}(n,\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{Sp}(A)$ soit contenu dans $\mathrm{D}(f)$.

3. On pose $\Pi(A,f) = \{P \in \mathbb{R}[X] : P(\lambda) = f(\lambda), \text{ pour tout } \lambda \in \mathrm{Sp}(A)\}$.

   (a) Montrer que $\Pi(A,f)$ n'est pas vide.

   (b) Soient $A = U\mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)U^{-1}$ une diagonalisation de A et $P \in \Pi(A,f)$. Etablir l'égalité

$$P(A) = U\mathrm{diag}(f(\lambda_1), ..., f(\lambda_n))U^{-1}.$$

   (c) En déduire que si $P, Q \in \Pi(A,f)$ alors $P(A) = Q(A)$.

Autrement dit, l'ensemble $\{P(A) : P \in \Pi(A,f)\}$ contient une et une seule matrice notée $f(A)$ tout au long du problème.

4. Montrer que $f(A)$ est diagonalisable et que $\mathrm{Sp}(f(A)) = \{f(\lambda) : \lambda \in \mathrm{Sp}(A)\}$.

II - Quelques exemples

Soient f et g deux fonctions réelles d'une variable réelle.

1. Soit A une matrice diagonalisable de $\mathrm{M}(n,\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathrm{D}(f) \cap \mathrm{D}(g)$. Montrer que si $f(\lambda) = g(\lambda)$ pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ alors $f(A) = g(A)$.

Dans la suite de cette partie, on suppose que f et g sont données respectivement par $f(x) = |x|$ et $g(x) = \sqrt{x}$. En outre, soit A une matrice diagonalisable de $\mathrm{M}(n,\mathbb{R})$.

2. Préciser $\mathrm{D}(f)$ et $\mathrm{D}(g)$.

3. En déduire que la matrice $f(A)$ existe. Dans tout ce qui suit, $f(A)$ est notée $|A|$.

4. Montrer que si $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}^+$ alors $A = |A|$.

5. A quelle condition la matrice $g(A)$ existe-t-elle? Dans ce cas, on note $\sqrt{A}$ au lieu de $g(A)$.

6. Vérifier que les deux matrices $\sqrt{A^2}$ et $\sqrt{|A|}$ existent.

7. Etablir les égalités $\sqrt{A^2} = |A| = \sqrt{|A|}^2$.

III - Décomposition polaire

1. Soient $A \in \mathrm{M}(n,\mathbb{R})$ et $X \in \mathbb{R}^n$.

   (a) Vérifier que ${}^tXAX$ est un nombre réel.

   (b) Que reconnaît-on lorsque $A = I$?

2. Soit $S \in \mathrm{M}(n,\mathbb{R})$. Montrer que $S \in \mathrm{S}^{++}(n,\mathbb{R})$ si, et seulement si, il existe $O \in \mathrm{O}(n,\mathbb{R})$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $S = O\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)O^{-1}$.

3. Soit $S \in \mathrm{S}^{++}(n,\mathbb{R})$.

   (a) Vérifier que $|S| = S$.

   (b) Montrer que $S \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ et que $S^{-1} \in \mathrm{S}^{++}(n,\mathbb{R})$.

   (c) Justifier l'existence de $\sqrt{S}$ et montrer que $\sqrt{S} \in \mathrm{S}^{++}(n,\mathbb{R})$.

4. Montrer que l'application $\rho : \mathrm{S}^{++}(n,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{S}^{++}(n,\mathbb{R})$ définie par $\rho(S) = \sqrt{S}$ est bijective et déterminer sa réciproque ρ^{-1}.

5. En déduire que $\sqrt{S^{-1}} = \sqrt{S}^{-1}$ pour tout $S \in \mathrm{S}^{++}(n,\mathbb{R})$.

6. Soit $A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$.

   (a) Montrer que ${}^tAA \in \mathrm{S}^{++}(n,\mathbb{R})$.

   (b) Montrer que $A\sqrt{{}^tAA}^{-1} \in \mathrm{O}(n,\mathbb{R})$.

7. Soient $O, U \in \mathrm{O}(n,\mathbb{R})$ et $S, T \in \mathrm{S}^{++}(n,\mathbb{R})$ telles que $OS = UT$. Etablir $S^2 = T^2$.

8. En déduire que l'application

$$\begin{array}{rccc} \pi : & \mathrm{O}(n,\mathbb{R}) \times \mathrm{S}^{++}(n) & \longrightarrow & \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \\ & (O,S) & \longmapsto & OS \end{array}$$

   est une bijection.

   Ainsi, pour tout $A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$, il existe un unique couple (O,S) de $\mathrm{O}(n,\mathbb{R}) \times \mathrm{S}^{++}(n)$ tel que $A = OS$. Cette égalité est appelée la *décomposition polaire* de A.

9. Soient $A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ et $A = OS$ sa décomposition polaire. Montrer que ${}^tAA = S^2$.

IV - Groupes polaires

Un sous-groupe G de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ est dit *groupe polaire* si les deux conditions suivantes sont vérifiées:

(i) G est stable par transposition (c'est-à-dire, ${}^tA \in \mathrm{G}$ pour tout $A \in \mathrm{G}$).

(ii) G est stable par racine carrée (c'est-à-dire, si $S \in \mathrm{G} \cap \mathrm{S}^{++}(n,\mathbb{R})$ alors $\sqrt{S} \in \mathrm{G}$).

1. Soit G un groupe polaire.

   (a) Pourquoi $\mathrm{G} \cap \mathrm{O}(n,\mathbb{R})$ est-il un sous-groupe de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$?

   (b) Montrer que G est stable par décomposition polaire (c'est-à-dire, si $A \in \mathrm{G}$ et $A = OS$ est sa décomposition polaire, alors $O \in \mathrm{G}$ et $S \in \mathrm{G}$).

Dans la suite de cette partie, on se donne $\alpha, \beta \in \{-1,1\}$ et $J \in \mathrm{M}(n,\mathbb{R})$ tels que ${}^tJ = \alpha J$ et $J^2 = \beta I$. On considère l'ensemble

$$\mathrm{G} = \left\{A \in \mathrm{M}(n,\mathbb{R}) : {}^tAJA = J\right\}.$$

2. Vérifier que $\det(A) \in \{-1,1\}$ pour tout $A \in \mathrm{G}$, où $\det(A)$ est le déterminant de A.
3. Montrer que G est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$.
4. Montrer que G est stable par transposition.
5. Soit $S \in \mathrm{G} \cap \mathrm{S}^{++}(n,\mathbb{R})$.
   (a) Prouver que $P\left(S^{-1}\right)J = JP(S)$, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$.
   (b) Etablir l'existence de $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $Q(S) = \sqrt{S}$ et $Q\left(S^{-1}\right) = \sqrt{S}^{-1}$.
   (c) En déduire que $\sqrt{S^{-1}}J = J\sqrt{S}$.
6. Conclure que G est polaire.

V - Groupe orthogonal et compacité

1. On note $\mathrm{tr}(A)$ la trace d'une matrice $A \in \mathrm{M}(n,\mathbb{R})$.
   (a) Montrer que $\mathrm{tr}({}^tAA) \geq 0$, pour tout $A \in \mathrm{M}(n,\mathbb{R})$.
   (b) Montrer que l'application $N : \mathrm{M}(n,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ définie par $N(A) = \sqrt{\mathrm{tr}({}^tAA)}$, est une norme sur $\mathrm{M}(n,\mathbb{R})$.

Dans le reste du problème, on suppose $\mathrm{M}(n,\mathbb{R})$ muni de sa structure d'espace vectoriel normé induite par la norme N.

2. On considère l'application $T : \mathrm{M}(n,\mathbb{R}) \to \mathrm{M}(n,\mathbb{R})$ définie par $T(A) = {}^tAA$.
   (a) Montrer que T est continue.
   (b) En déduire que $\mathrm{O}(n,\mathbb{R})$ est une partie fermée de $\mathrm{M}(n,\mathbb{R})$.
   (c) Conclure que $\mathrm{O}(n,\mathbb{R})$ est une partie compacte de $\mathrm{M}(n,\mathbb{R})$.
3. Soit G un sous-groupe de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$. On suppose de plus que G contient $\mathrm{O}(n,\mathbb{R})$ et que c'est une partie compacte de $\mathrm{M}(n,\mathbb{R})$. On se donne $A \in \mathrm{G}$ et on écrit sa décomposition polaire $A = OS$.
   (a) Montrer que l'ensemble $\left\{S^k : k \in \mathbb{Z}\right\}$ est une partie bornée de $\mathrm{M}(n,\mathbb{R})$.
   (b) En déduire que $\mathrm{Sp}(S) = \{1\}$ et que $S = I$.
   (c) Que peut-on alors dire de G?
4. Soient $A \in \mathrm{M}(n,\mathbb{R})$ et $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathrm{M}(n,\mathbb{R})$ donnée par $A_k = A - \dfrac{1}{k+1}I$.
   (a) Montrer que $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers A.
   (b) Etablir l'existence de $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $A_k \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geq k_0$.
   (c) En déduire qu'il existe une suite $(O_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathrm{O}(n,\mathbb{R})$ et une suite $(S_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathrm{S}^{++}(n,\mathbb{R})$ telles que la suite $(O_kS_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers A.
   (d) Justifier l'existence d'une sous-suite de $(O_k)_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge vers une matrice $O \in \mathrm{O}(n,\mathbb{R})$.
   (e) En déduire qu'il existe $S \in \mathrm{S}^{+}(n,\mathbb{R})$ telle que $A = OS$.

Fin de l'épreuve

Concours d'entrée à l'Ecole Normale Supérieure JUILLET 2009	Matière : FRANÇAIS (MP/PC)
	Durée 3H coefficient 2

LA MORT DES ABEILLES

Les abeilles **s'éteignent** par milliards depuis quelques mois. Leur disparition pourrait sonner le glas de l'espèce humaine. Et de la même façon que les passagers du Titanic n'ont pas vu s'approcher l'iceberg ; de la même façon que personne n'a vu arriver le tsunami, de la même façon personne ne **voit venir** cette catastrophe.

C'est une incroyable épidémie, d'une violence et d'une ampleur faramineuse, qui est en train de se propager de ruche en ruche sur la planète. Partie d'un élevage de Floride l'automne dernier, elle **a** d'abord **gagné** la plupart des Etats américains, puis le Canada et l'Europe jusqu'à contaminer Taiwan en avril dernier. Partout, le même scénario se répète : par milliards, les abeilles quittent les ruches pour ne plus y revenir. Aucun cadavre à proximité. Aucun prédateur visible, pas plus que de squatter pourtant prompt à occuper les habitats abandonnés.

En quelques mois, entre 60 % et 90 % des abeilles se sont ainsi **volatilisées** aux Etats-Unis où les dernières estimations chiffrent à 1,5 million (sur 2,4 millions de ruches au total) le nombre de colonies qui ont disparu dans 27 Etats. Au Québec, 40 % des ruches sont portées manquantes. En Allemagne, selon l'association nationale des apiculteurs, le quart des colonies **a été décimé** avec des pertes jusqu'à 80 % dans certains élevages.

Même chose en Suisse, en Italie, au Portugal, en Grèce, en Autriche, en Pologne, en Angleterre où le syndrome a été baptisé «phénomène Marie-Céleste», du nom du navire dont l'équipage s'est volatilisé en 1872. En France, où les apiculteurs ont connu de **lourdes** pertes depuis 1995 (entre 300.000 et 400.000 abeilles chaque année) jusqu'à l'interdiction du pesticide incriminé, le Gaucho. Sur les champs de maïs et de tournesol, l'épidémie **a** également **repris de plus belle**, avec des pertes allant de 15 % à 95 % selon les cheptels.

Questions :

1. Remplacez par un mot ou une expression de même sens les mots ou les expressions en gras.
2. Construisez une phrase avec :

incriminé ; se volatiliser ; se propager ; estimation ; contaminer

3. Quelles sont selon vous les causes et les conséquences de la disparition des abeilles.
4. Essai : L'humanité est menacée en raison de la dégradation de l'environnement. Développez cette idée en vous appuyant sur des exemples précis dans le monde moderne.

UNIVERSITE DE TUNIS
ECOLE NORMALE SUPERIEURE

Concours d'entrée à l'Ecole Normale Supérieure
Session 2009

Sections : Mathématiques-Physique et Physique-Chimie
Epreuve de Physique

Durée : 4h **Coef. : 5**

L'épreuve comporte 04 pages. Il sera largement tenu compte de la présentation, de la rédaction et du soin apporté à la copie. L'usage de la calculatrice est autorisé. Tout document est interdit.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Problème n°1 : Ondes électromagnétiques non planes

Entre deux plans métalliques parfaits, occupant les plans y = 0 et y = a, se propage dans le vide suivant Oz une onde électromagnétique $(\vec{E}, \vec{B})$ monochromatique, de pulsation ω, dont les composantes suivant les axes du référentiel Oxyz orthonormé direct sont :

$$\vec{E} = \begin{cases} E_x = E_0 \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) \sin(\omega t - kz) \\ E_y = 0 \\ E_z = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \vec{B} = \begin{cases} B_x \\ B_y = B_1 \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) \sin(\omega t - kz) \\ B_z = B_2 \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right) \cos(\omega t - kz) \end{cases}$$

1. Rappeler les équations de Maxwell dans le vide.
2. Montrer que l'onde électromagnétique proposée vérifie les équations de Maxwell si $B_x = 0$ et si B_1 et B_2 se calculent en fonction de E_0.
3.
   a. Etablir la relation $k(\omega)$ et calculer la pulsation de coupure ω_c en fonction de a et c (célérité de la lumière dans le vide). Quelle relation doivent vérifier la distance a entre les plaques et la longueur d'onde pour retrouver la structure de l'onde plane monochromatique ?
   b. Exprimer la vitesse de phase V_φ ainsi que la vitesse de groupe $V_g = \frac{d\omega}{dk}$ du milieu vide intra conducteur.
   c. Exprimer la vitesse de groupe V_g d'une onde en fonction de V_φ, dV_φ/dk et k (module du vecteur d'onde).
4.
   a. Exprimer en fonction de a, E_0, k, l, ω et μ_0 (perméabilité magnétique du vide), la puissance (P) moyenne qui traverse un plan de section z = cte entre les plateaux de largeur l dans la direction Ox.

b. Exprimer l'énergie électromagnétique volumique u(x,y,z,t) entre les plateaux ; en déduire sa valeur moyenne $\langle u(x,y,z)\rangle$ dans le temps, puis sa valeur moyenne $\langle u(z)\rangle$ sur la section droite d'abscisse z = cte, que l'on exprimera en fonction de E_0 et ε_0 (permittivité électrique du vide).

c. En déduire la vitesse de propagation V de l'énergie électromagnétique dans ce guide en fonction de c et V_φ ; comparer avec la vitesse de groupe V_g et conclure.

5. On considère l'onde $(\overrightarrow{E_r}, \overrightarrow{B_r})$ qui résulte de la superposition de l'onde $(\vec{E}, \vec{B})$ précédente de pulsation ω et d'une onde $(\overrightarrow{E'}, \overrightarrow{B'})$ de même type, de même direction de propagation Oz et de même amplitude, mais de pulsation $\omega+\Delta\omega$ $(\Delta\omega<<\omega)$. Montrer que le champ résultant $\overrightarrow{E_r}$ est une onde sinusoïdale de même phase que l'onde $(\vec{E}, \vec{B})$, mais modulée en amplitude par une enveloppe sinusoïdale et progressive que l'on déterminera. Exprimer la vitesse V' de cette onde en fonction de la vitesse de groupe V_g ; conclure.

Problème n°2 : Mouvement d'une planète

Nous voulons étudier le mouvement d'une planète *P*, assimilée à un point matériel dans le champ de gravitation d'une étoile de masse M_e de centre *O*, considérée comme ponctuelle et fixe. La planète de masse M_p est repérée par ses coordonnées polaires (r,θ) où $r = \|\overrightarrow{OP}\|$. Nous considérons un référentiel lié à l'étoile comme un référentiel galiléen. On notera $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta})$ la base polaire et $\vec{k}$ un vecteur unitaire tel que la base $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \vec{k})$ soit orthonormée directe.

1. Exprimer la force exercée par l'étoile sur la planète en fonction des masses M_p ,M_e, de la distance $r = OP$, de la constante de gravitation universelle *G* et du vecteur unitaire $\overrightarrow{e_r} = \frac{\overrightarrow{OP}}{r}$.
2.
   a. Rappeler l'expression du vecteur vitesse de *P* en coordonnées polaires.
   b. Donner l'expression du moment cinétique $\vec{L}$ de *P* au point *O*, en fonction de M_p, *r* et $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$.
   c. Montre que le mouvement est plan. Préciser ce plan. Déduire que $r^2\dot{\theta}$ est une constante que l'on définira.
   d. En déduire que l'accélération orthoradiale est nulle.
3. On suppose dans cette question que la planète décrit un **mouvement circulaire** de rayon *R* et de période *T*. On notera V_c le module de la vitesse de ce mouvement.
   a. Etablir l'expression de V_c en fonction de *R*, *G* et M_e.
   b. En déduire une relation entre *R*, *T*, *G* et M_e (3ème loi de Kepler).
   c. Déterminer l'énergie mécanique en fonction de *G*, *R*, M_p *et* M_e, en supposant que l'énergie potentielle est nulle à l'infini. Est-ce que cette énergie est une constante du mouvement. Justifier.

4. On rappelle que l'équation polaire d'une ellipse est donnée par :

$$r(\theta) = \frac{p}{1+e\cos(\theta)},$$

où p et e sont respectivement le paramètre et l'excentricité de l'ellipse. On se propose d'étudier le mouvement de la planète P à l'aide du vecteur excentricité défini par $\vec{e} = -\frac{L}{GM_pM_e}\vec{V} + \overrightarrow{e_\theta}$, qui est un vecteur orthogonal au demi grand axe de l'ellipse (comme le montre la figure 1), avec $\vec{V}$ est le vecteur vitesse de la planète.

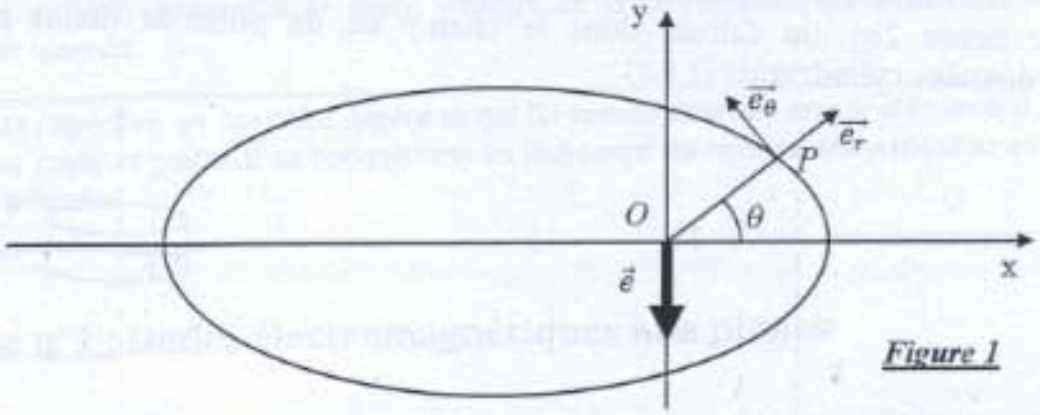


Figure 1

a. Montrer que le vecteur excentricité $\vec{e}$ est constant.
b. En faisant le produit scalaire $\vec{e}.\overrightarrow{e_\theta}$ et en utilisant la figure 1, montrer que $r(\theta)$ s'écrit sous la forme $\frac{p}{1+e\cos(\theta)}$. Identifier alors le paramètre p de l'ellipse en fonction de G, M_p, M_e et L. On précise que l'excentricité e de la trajectoire est égale à la norme de $\vec{e}$.
c. Préciser la valeur de e pour une trajectoire circulaire.
d. Dans le cas d'un mouvement circulaire, préciser la valeur de L en fonction de R, V_c et M_p. Retrouver à l'aide du vecteur excentricité, l'expression de la vitesse de la planète V_c en fonction de R, G et M_e.

Problème n°3 : Champ électrostatique crée par une spire

Partie A : Champ sur l'axe

On donne une spire circulaire de rayon R, de centre O et d'axe Oz. Cette spire porte une charge positive Q répartie uniformément avec la densité linéique de charge λ.
(Voir figure 2a)

1. Montrer par des arguments de symétrie que, sur l'axe, le champ électrostatique $\vec{E}$ est porté par l'axe et prend la forme $\vec{E} = E\,\vec{k}$ où $\vec{k}$ est un vecteur unitaire porté par l'axe Oz.
2. Comparer E(-z) et E(z).

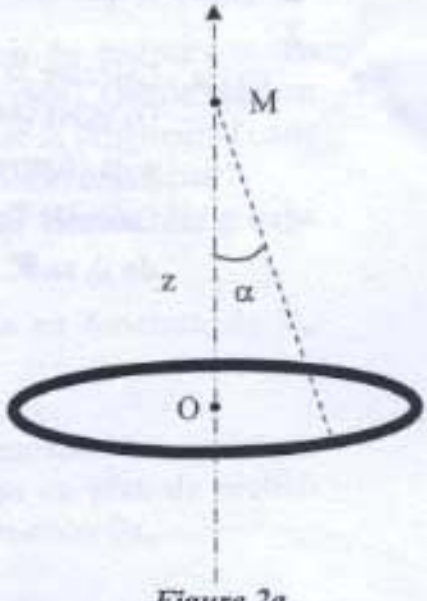


Figure 2a

3. Calculer le champ électrostatique créé en un point M de l'axe tel que OM = z. On donnera le résultat en fonction de Q, R, ε_0 (permittivité électrique du vide) et de la distance z.
4. Tracer l'allure de la fonction E(z).

Partie B : Champ au voisinage de l'axe

On s'intéresse maintenant au champ électrostatique au voisinage de l'axe (voir figure 2b). On calcule donc le champ en un point M défini par des coordonnées cylindriques (r,θ,z).

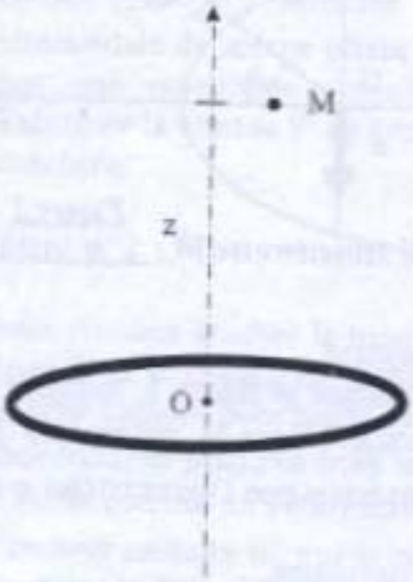


Figure 2b

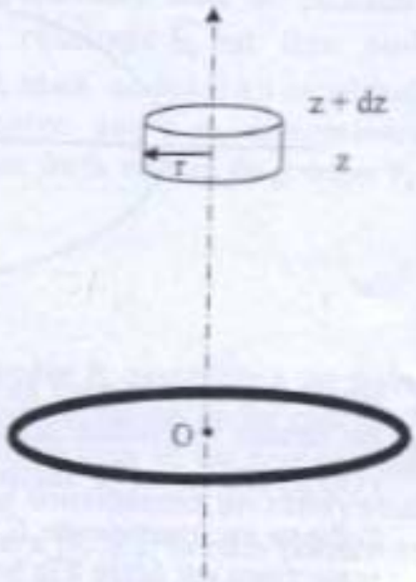


Figure 2c

1. Montrer par des arguments de symétrie très précis, qu'en M, le champ $\vec{E}$ n'a pas de composante orthoradiale E_θ.
2. Montrer que la norme de $\vec{E}$ ne dépend que de r et z.
3.
   a. Calculer le flux de $\vec{E}$ à travers une surface fermée cylindrique d'axe Oz dont les bases sont des disques de rayon r petit et de cotes z et z + dz (figure 2c). En déduire que $E_r(r,z) = -\frac{r}{2}\frac{dE_z(z)}{dz}$.
   b. Calculer l'expression de $E_r(r,z)$. On donnera le résultat en fonction de Q, ε_0, R, r et z.

Fin de l'épreuve

Ministère de l'Enseignement Supérieur, de la Recherche Scientifique et de la Technologie
Université de Tunis
Ecole Normale Supérieure

Session 2009
du
Concours d'Entrée à l'Ecole Normale Supérieure
Filière PC

Epreuve de mathématiques

4 Pages Durée: 4 heures

La qualité de la rédaction, le soin de la présentation et la rigueur des raisonnements constitueront un élément important pour l'appréciation des copies. L'usage de tout ouvrage de référence et de tout autre matériel électronique est strictement interdit.

Comme de coutume, on note $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites de nombres réels. Pour une suite $a = (a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, on note $R(a)$ le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$. En outre, on pose

$$C = \left\{(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \text{ la série } \sum a_n \text{ converge}\right\}$$

et on note $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ la somme de la série $\sum a_n$, où $(a_n) \in C$. On pose également

$$E = \left\{a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : R(a) \geq 1\right\}.$$

Pour tout $a = (a_n) \in E$, on définit une fonction $f_a : [0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$ en posant

$$f_a(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \quad \text{pour tout } x \in [0,1[.$$

Soit $a = (a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On dit que la série $\sum a_n$ ***converge au sens d'Abel*** si les deux conditions suivantes sont vérifiées:

(i) $a \in E$.

(ii) f_a admet une limite finie à gauche en 1.

On considère

$$A = \left\{(a_n) \in E : \sum a_n \text{ converge au sens d'Abel}\right\}.$$

Dès que $a \in A$, on peut prolonger f_a en 1 en posant $f_a(1) = \lim_{x \to 1^-} f_a(x)$. On note encore f_a la fonction ainsi prolongée. Dans ce cas, le réel $f_a(1)$ est appelé ***somme d'Abel*** de la série $\sum a_n$.

- Première partie -

1. Montrer que si $a \in A$, alors f_a est continue sur $[0,1]$.

2. Soit $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Etudier, dans les trois cas suivants, la convergence (au sens usuel) et la convergence au sens d'Abel de la série $\sum a_n$ en précisant, en cas d'existence, la valeur de sa somme (usuelle) et la valeur de sa somme d'Abel.

   (i) $a_n = \dfrac{1}{(2n)!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   (ii) $a_0 = 0$ et $a_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

   (iii) $a_n = (-1)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. Montrer que C est contenu dans E.

4. Soient $a = (a_n) \in C$ telle que $R(a) > 1$. Montrer que $a \in A$ et que la somme d'Abel est égale à $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

5. Soient $a = (a_n) \in C$ telle que $R(a) = 1$ et ε un réel strictement positif. On note

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k \quad \text{et} \quad S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, \quad \text{pour tout } (n,x) \in \mathbb{N} \times [0,1].$$

   (a) Justifier l'existence de $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $|R_n| \leq \varepsilon/2$, pour tout $n \geq n_0$.

   (b) Soient $x \in [0,1]$ et $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $m \geq n+2$. Etablir l'égalité

$$S_m(x) - S_n(x) = x^{n+1} R_n - x^m R_m + \sum_{k=n+1}^{m-1} \left(x^{k+1} - x^k\right) R_k.$$

   (c) En déduire que si $n, m \in \mathbb{N}$ tels que $n \geq n_0$ et $m \geq n+2$, alors

$$|S_m(x) - S_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}\left(x^{n+1} + x^m + \sum_{k=n+1}^{m-1}\left(x^k - x^{k+1}\right)\right).$$

   (d) Montrer que la suite de fonctions (S_n) converge uniformément sur $[0,1]$ vers une fonction que l'on déterminera (sous la forme d'une série).

6. En déduire que C est strictement inclus dans A et que si $(a_n) \in C$, alors sa somme d'Abel est égale à $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

7. Soient $(a_n) \in A$ telle que $a_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et S la somme d'Abel de la série $\sum a_n$.

   (a) Montrer que

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k \leq S, \quad \text{pour tout } (n,x) \in \mathbb{N} \times [0,1[.$$

   (b) En déduire que la série $\sum a_n$ converge et que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \leq S$.

(c) Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = S$.

8. On considère l'application $N : A \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$N(a) = \int_0^1 |f_a(x)|\,dx.$$

(a) Montrer que A est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

(b) Montrer que N est une norme sur A.

(c) Calculer $N(a)$ pour chacun des exemples de la question 2., lorsque cela a un sens.

(d) Soit $a = (a_n) \in A$ telle que $a_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\left(\frac{a_n}{n+1}\right) \in A$ et calculer $N(a)$.

- Deuxième partie -

Dans cette partie, p est entier naturel fixé tel que $p \geq 2$. Soit

$$P = \left\{(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : a_{n+p} = a_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}\right\}.$$

1. Vérifier que P est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

On définit deux applications $\alpha : P \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\beta : P \longrightarrow \mathbb{R}^p$ en posant

$$\alpha(a) = \sum_{k=0}^{p-1} a_k \quad \text{et} \quad \beta(a) = (a_0, a_1, ..., a_{p-1}), \quad \text{pour } a = (a_n) \in P.$$

2. Montrer que α et β sont linéaires.

On note $\ker\alpha$ et $\ker\beta$ les noyaux respectifs de α et β.

3. Montrer que $\ker\alpha$ est de dimension finie que l'on déterminera. Quelle est l'image de α?

4. Montrer que β est un isomorphisme.

5. Soit $a = (a_n) \in P$.

(a) Montrer que la série $\sum a_n$ converge si, et seulement si, la suite a est nulle.

(b) Montrer que la série $\sum a_n$ converge au sens d'Abel si, et seulement si, $a \in \ker\alpha$.

Pour tout $k \in \{1, 2, ..., p-1\}$, on note $u_k = (u_{k,n}) \in P$ définie par

$$u_{k,0} = 1, \quad u_{k,k} = -1 \quad \text{et} \quad u_{k,n} = 0, \text{ pour tout } n \in \{0, 1, ..., p-1\} \text{ avec } n \notin \{0, k\}.$$

6. Montrer que $(u_1, u_2, ..., u_{p-1})$ est une base de $\ker\alpha$.

On considère l'application $L : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définie par $L((a_n)) = (a_{n+1})$ pour tout $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

7. Vérifier que L est linéaire.

8. Montrer que $\ker\alpha$ est stable par L (c'est-à-dire, $L(a) \in \ker\alpha$ pour tout $a \in \ker\alpha$).

On note L_a l'endomorphisme de $\ker\alpha$ induit par la restriction de L à $\ker\alpha$.

9. Déterminer M_{u_0}, la matrice de L_{u_0} dans la base $(u_1, \ldots, u_{p-1})$, et calculer $(M_{u_0})^p$.

10. Déterminer le déterminant de L_{u_0}.

11. Trouver les valeurs propres réelles de L_{u_0} ainsi les sous-espaces propres associés.

- Troisième partie -

1. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx = n!$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Soit $a = (a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, une suite bornée.

   (a) Montrer que le rayon de convergence de la série $\sum \dfrac{a_n x^n}{n!}$ est infini.

   (b) En déduire que la fonction $g_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

   $$g_a(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n x^n}{n!}$$

   est continue.

Dans la suite de cette partie, on dit que la série $\sum a_n$ ***converge au sens de Borel*** si l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} g_a(x) e^{-x} dx$ converge. Dans ce cas, la valeur de cette intégrale est appelée ***somme de Borel*** de la série $\sum a_n$. On note

$$B = \left\{ (a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : (a_n) \text{ est bornée et } \sum a_n \text{ converge au sens de Borel} \right\}.$$

3. Etudier la convergence de $\sum a_n$ au sens de Borel dans les trois cas suivants:

   (i) $a_n = (-1)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   (ii) $a_{2n} = (-1)^n$ et $a_{2n+1} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   (iii) $a_0 = 1$ et $a_n = 0$, pour tout $n \geq 1$.

4. Montrer que B est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

5. Soit $a = (a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $a_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\sum a_n$ converge. On note $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

   (a) Montrer que

   $$\int_0^x g_a(t) e^{-t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(a_n \int_0^x \frac{t^n}{n!} e^{-t} dt \right), \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}_+^*.$$

   (b) Montrer que $\sum a_n$ converge au sens de Borel et que $T \leq S$, où T est la somme de Borel de $\sum a_n$.

   (c) Etablir

   $$\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n} \left(a_k \int_0^{+\infty} \frac{t^k}{k!} e^{-t} dt \right) \leq \int_0^{+\infty} g_a(t) e^{-t} dt.$$

   (d) En déduire que $T = S$.

Fin de l'épreuve

REPUBLIQUE TUNISIENNE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR,
DE LA RECHERCHE SCINTIFIQUE ET DE LA TECHNOLOGIE

CONCOURS NATIONAL
D'ADMISSION A L'ECOLE NORMALE SUPERIEURE

DISCIPLINE : SCIENCES FONDAMENTALES **SPECIALITE** : PHYSIQUE-CHIMIE
EPREUVE DE CHIMIE **DUREE** : 4 Heures **COEFFICIENT** : 4

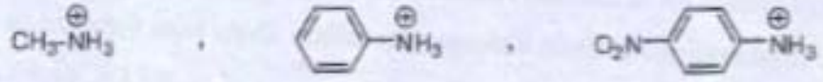
Les parties A et B sont à rédiger sur deux copies séparées.

La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la présentation des raisonnements constitueront un élément important pour l'appréciation des copies.
Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

PARTIE A (40 points)

EXERCICE I* : *Acidité, tautomérie, isomérie, stéréoisomérie

I-a) Classer les acides suivants par ordre d'acidité décroissante :

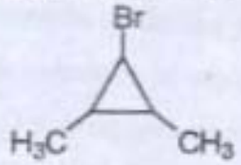


Justifier votre classement.

I-b) Donner les cinq formes tautomères de l'acétylacétone: CH_3-CO-CH_2-CO-CH_3.

Quelle est la forme la plus stable ? Pourquoi ?

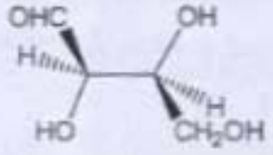
I-c) Représenter les quatre stéréoisomères du 1-bromo-2,3-diméthylcyclopropane :



Indiquer ceux qui sont optiquement actifs et ceux qui ne le sont pas.

I-d) En présence d'acide chlorhydrique aqueux, le 3,3-diméthylbut-1-ène donne lieu à deux intermédiaires cationiques. Les écrire et donner les deux composés isomères obtenus.

I-b) Représenter la projection de Newman correspondante à la structure spatiale suivante.



Pour cette structure, donner les configurations absolues des carbones asymétriques.

A quelle paire (*dl*) appartient ce stéréoisomère ?

EXERCICE II : ***Stéréochimie, représentation spatiale, projections de Newman et de Fischer***

L'acide tartrique (ou acide 2,3-dihydroxybutanedioïque) possède trois stéréoisomères de configuration qu'on note **P**, **Q** et **R**. On désignera par **P** le stéréoisomère de configuration (R, R).

II-a) En justifiant sa configuration, donner une représentation de Cram de **P**.

II-b) Représenter **P** en projection de Newman selon la liaison C_2–C_3. S'agit-il d'une configuration thréo ou érythro? Justifier.

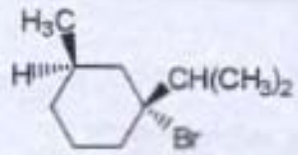
II-c) Donner une projection de Fischer de **P**.

II-d) Sachant que le mélange équimolaire de **P** et **Q** a un pouvoir rotatoire nul, représenter **Q** en projection de Fischer. Expliquer.

II-e) Représenter **R** selon Fischer. Peut-on prévoir la valeur de son pouvoir rotatoire?

EXERCICE III : ***Equilibre conformationnel, réactivité***

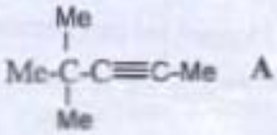
On considère le 1-bromo-1-isopropyl-3-méthylcyclohexane représenté ci-dessous :



III-a) Ecrire les deux conformations chaises relatives à ce composé et qui sont en équilibre en précisant le sens du déplacement de ce dernier. Justifier votre réponse

III-b) Donner les structures des oléfines obtenues par action d'une base forte sur ce dérivé bromé. Expliquer les mécanismes de leur formation.

EXERCICE IV: ***Mécanismes réactionnels, synthèse organique***

IV-a) Apartir de l'alcyne noté **A**, on réalise la suite réactionnelle suivante:  **A**

Par hydrogénation partielle en présence de palladium empoisonné **A** conduit à **B**. L'ozonolyse de **B** en milieu réducteur fournit **C** et **D**. Alors que le traitement de **C** par KOH, suivi d'hydrolyse donne deux produits **E** et **F**, celui de **D** donne un seul produit **G**.

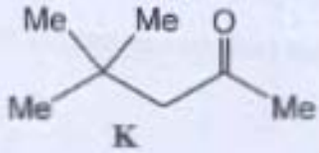
Donner les formules développées de **B**, **C**, **D**, **E**, **F** et **G** en détaillant les mécanismes des étapes :

C ⟶ **E + F**

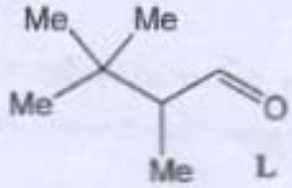
D ⟶ **G**

IV-b) Traité par BrOH en milieu acide, **B** donne un composé **H** qui réagit avec la soude pour conduire à **I** . Donner la structure de **I** et le produit de son hydrolyse acide **J**.

IV-c) **J** est traité par H_2SO_4 à chaud conduit majoritairement à la cétone **K** accompagnée de l'aldéhyde **L** (produit minoritaire):



K



L

Détailler les différents mécanismes ayant conduit à **K** et **L**.

PARTIE B (40 points)

I ATOMISTIQUE ET LIAISONS CHIMIQUES

I-1 Donner la structure électronique de l'or Au (Z=79), du vanadium V (Z=23) et du fer Fe (Z=26).

I-2-1 Ecrire la structure de Lewis du monoxyde de carbone CO ? Commenter.

I-2-2 Donner le diagramme des orbitales moléculaires de CO .

I-3 Le fer Fe forme avec cinq molécules CO un complexe de formule $Fe(CO)_5$

I-3-1 Enoncer la règle des 18 électrons .

I-3-2 Justifier la formation de ce complexe et décrire sa structure..

I-4-1 Donner le nom de l'oxyde V_2O_5 .

I-4-2 Quelle est la principale application industrielle de V_2O_5 ?

I-5 L'oxydation de SO_2 en SO_3 nécessite une catalyse hétérogène.

Décrire cette catalyse et écrire les équations des réactions chimiques ayant lieu lors de l'oxydation.

On donne : pour C, Z=6; et pour O, Z=8.

II pH ET DOSAGE ACIDE-BASE

II. 1. Calculer le pH d'une solution aqueuse d'acide acétique de concentration 10^{-5}mol.L^{-1}. On donne le pKa=4,8.

II. 2. On veut doser 10 cm^3 d'une solution de concentration 0,3 mol.L^{-1} de cet acide par une solution de soude de concentration 0,2 mol.L^{-1}.

II-2-1 Donner l'allure de la courbe de dosage.

II-2-2 Calculer le pH au point d'équivalence.

III CRISTALLOGRAPHIE ET DIAGRAMME BINAIRE

L'or 22 carats est un alliage or cuivre.

III-1-1 Sachant que l'or pur correspond à 24 carats et que la masse de l'or dans 100 g de l'alliage 22 carats est de 91,67g , donner une définition du carat.

III-1-2 Calculer la fraction molaire de l'or dans cet alliage sachant que La masse atomique de l'or est égale à 197g et que celle du cuivre est de 63,5g .

III-2 L'or pur cristallise dans un système cubique faces centrées d'arête **a**=408pm.

III-2-1 Décrire cette structure et donner un schéma de la maille élémentaire.

III-2-2 En supposant que pour l'or 22 carats , l'arête **a** garde la même valeur, déterminer la masse volumique de cet alliage (supposé de substitution).

III-3 On admettra dans ce qui suit que l'or et le cuivre sont miscibles en toutes proportions à l'état liquide et solide et que le diagramme binaire solide-liquide correspondant présente un point indifférent pour une fraction molaire de l'or égale à 0 ,56.

III-3-1 Définir la notion de point indifférent.

III-3-2 Donner l'allure qualitative du diagramme binaire solide-liquide correspondant (en portant en abscisses les fractions molaires) . les températures de fusion de l'or et du cuivre sont respectivement de 1064°C et 1084°C.

III-3-3 Placer sur ce diagramme le point correspondant à l'or 22 carats à 25°C.

IV SOLUBILITE

IV-1 On met dans un litre d'eau pure, sans variation de volume, une mole de chlorure d'argent. Quelle est la solubilité de AgCl ?

IV-2 On ajoute un litre d'une solution d'acide chlorhydrique à 0 ,1 $mol.L^{-1}$. Que devient la solubilité du chlorure d'argent ?

IV-3 On introduit du chromate d'argent $Ag_2 CrO_4$ dans une solution dont le pH est imposé par une solution tampon.
Déterminer la courbe log(s)=f(pH) ou s représente la solubilité du chromate d'argent.

On donne le produit de solubilité de $Ag_2 CrO_4$ Ks avec pKs=12 et la constante d'acidité du couple $HCrO_4^-/CrO_4^{2-}$ Ka avec pKa=6. Le produit de solubilité de AgCl est noté Ks_1 avec pKs_1=10.

V. EQUILIBRES CHIMIQUES

La constante de l'équilibre de formation du monoxyde de carbone gazeux par l'action d'une molécule de dioxyde de carbone gazeux et du carbone solide à 1000 K est égale à 2.

V-1-1 Déterminer la variance de cet équilibre.

V-1-2 Dans une enceinte vide, de volume invariable égal à 100 litres, on mélange à 1000K , 4 moles de CO_2 ,1 mole de CO et 5 moles de carbone.

Dans quel sens évolue la réaction ? Quelle sera la composition finale du système ?

V-1-3 Expliquer qualitativement puis quantitativement comment évolue le système lorsqu'on ajoute au mélange une mole d'un constituant gazeux inerte ?

On donne $R= 8,3114\ J.K^{-1}.mol^{-1}$.

----------Fin de l'épreuve----------